

Tentamen Oriëntatie Wiskunde
5 Februari 2010, 9.00–12.00

1. Geef twee verschillende paren gehele getallen (x, y) die voldoen aan de vergelijking $60x + 17y = 1$.

2. Bewijs, dat voor a, b, c gehele getallen de volgende eigenschap geldt:

$$\text{zowel } \text{ggd}(a, c) = 1 \text{ als } \text{ggd}(b, c) = 1 \Leftrightarrow \text{ggd}(ab, c) = 1.$$

3. Laat zien dat als $n > 0$ een oneven, geheel getal is, dan is $2^n + 1$ deelbaar door 3 maar niet door 5.

4. We beschouwen een vallende regendruppel. We nemen aan dat de massa m van de druppel afhangt van de tijd t , en dat de toename van de massa op tijd t evenredig is aan $m(t)$. De (positieve) evenredigheidsconstante noemen we k . Toepassing van de wet van Newton op de regendruppel levert $(mv)' = gm$ waarbij v de snelheid van de regendruppel is (naar beneden gericht) en g de gravitatie-constante. De eindsnelheid van de regendruppel is $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$. Bereken de eindsnelheid als functie van k en g .

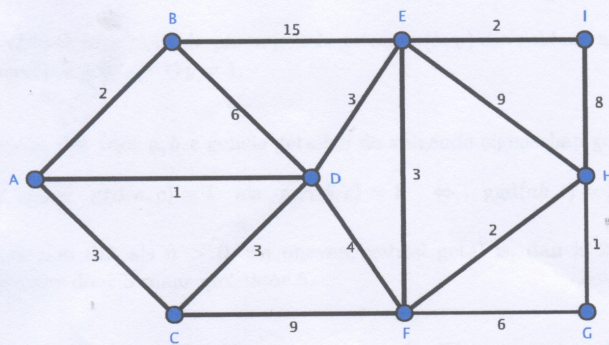
5. Uit een waarneming blijkt dat een ster een beetje oscilleert. We vragen ons af hoe de frequentie ω van de oscillatie afhangt van de eigenschappen van de ster. Om te beginnen identificeren we de fysisch relevante variabelen. De massadichtheid ρ en straal van de ster r lijken van belang; ook de gravitatie constante g (uit Newton's gravitatie-wet) is van belang. We zouden de massa m van de ster aan ons lijstje kunnen toevoegen, maar dat heeft weinig zin als we aannemen dat de massadichtheid constant is; immers dan geldt $m = \rho(4\pi r^3/3)$. Daarom zoeken we een model dat ω relateert aan ρ , r en g .

- (a) De dimensie van ω is tijd^{-1} . Bepaal de dimensies van r , ρ en g .
- (b) Hoe luidt het Buckingham Pi Theorema?
- (c) Pas het Buckingham Pi Theorema toe op dit model.
- (d) Laat zien dat een dimensie-analyse het volgende model oplevert

$$\omega = C\sqrt{G\rho}$$

waarbij C een constante is (d.w.z. de frequentie hangt niet af van de straal van de ster).

6. Bepaal in de onderstaande graaf G een minimale boom die dezelfde knopen heeft als G . Leg uit, hoe je die boom construeert, en schets de boom.



7. De Prüfer-code van een boom met wortel 0 is 3 3 1 7 5 2 7. Reconstructeer de extended Prüfer-code en schets de boom.
8. Bewijs de stelling:
Zij G een bipartiete graaf met m knopen aan elke kant. Stel dat voor elke knoop v van G de graad $d(v)$ groter is dan $\frac{m}{2}$. Dan heeft G een perfecte matching.